Operacje arytmetyczne na liczbach dwójkowych

ZAGADNIENIA

- Operacje wykonywane na liczbach dwójkowych

Dodawanie dwójkowe

Aby wykonać dodawanie na liczbach dwójkowych, trzeba znać zasady dodawania, czyli wyniki sumowania poszczególnych cyfr. Zasady dodawania przedstawiono w tabeli 16.1.

Tabela 16.1. Zasady dodawania liczb w systemie dwójkowym

Działanie	Wynik	Uwagi
0 + 0	0	
0 + 1	1	
1 + 0	1	
1 + 1	10	czyli 0 z przeniesieniem
1 + 1 + 1	11	czyli 1 z przeniesieniem

PRZYKŁAD 16.1

Dodawanie liczb dwójkowych $(1011010)_2$ oraz $(101100)_2$

Liczby zapisujemy jedną pod drugą, tak by w kolejnych kolumnach znalazły się cyfry stojące na pozycjach o tych samych wagach. Jest to postępowanie analogiczne do dodawania liczb w systemie dziesiętnym.

Zatem:

$$\begin{array}{r} 1011010 \\ +\ \ 101100 \\ \hline \end{array}$$

Dodawanie rozpoczynamy od prawej kolumny. Dodajemy wartości cyfr w kolumnie, zgodnie z tabelą 16.1. Wynik zapisujemy pod kreską. Jeśli suma jest dwucyfrowa (1 + 1 = 10), pod kreską zapisujemy tylko ostatnią cyfrę 0, a 1 przechodzi do następnej kolumny (na lewo). Wartość cyfry 1 zostanie dodana do sumy uzyskanej w następnej kolumnie. Jest to tzw. przeniesienie (wyróżnione czerwoną czcionką). Czyli:

$$\begin{array}{lr} \text{Przeniesienie} & 111 \\ & 1011010 \\ & +\ \ 101100 \\ \hline & 10000110 \end{array}$$

Jeśli w krótszej liczbie zabrakło cyfr, miejsca te uzupełniamy zerami (wyróżnione kolorową czcionką):

```
Przeniesienia  1111
                1011010
             +  0101100
             ----------
               10000110
```

Dodaliśmy wartości odpowiadające wszystkim cyfrom, ale przeniesienie wciąż wynosi 1. Zatem uzupełniamy miejsca zerami i dodajemy wszystkie cyfry:

```
Przeniesienia  1111
               01011010
              +00101100
              ---------
               10000110
```

Sprawdźmy, czy otrzymany wynik jest poprawny.

$(1011010)_2 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 = (90)_{10}$

$(101100)_2 = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1\ 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 = (44)_{10}$

$(10000110)_2 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7 = (134)_{10}$

$90 + 44 = 134$

Odejmowanie dwójkowe

Przy odejmowaniu liczb dwójkowych korzystamy z zasad odejmowania przedstawionych w tabeli 16.2.

Tabela 16.2. Zasady odejmowania liczb w systemie dwójkowym

Działanie	Wynik
0 – 0	0
0 – 1	1 i pożyczka od następnej pozycji
1 – 0	1
1 – 1	0
pożyczka – 0 – 0	1 z pożyczką
pożyczka – 0 – 1	0 z pożyczką
pożyczka – 1 – 0	0
pożyczka – 1 – 1	1 z pożyczką

Przy odejmowaniu 0 – 1 otrzymujemy wynik 1 i pożyczkę od następnej pozycji. Pożyczka oznacza konieczność odjęcia 1 od różnicy liczb odpowiadajcych cyfrom znajdującym się w kolumnie z lewej strony.

Na początku zakładamy, że od liczb większych będziemy odejmować mniejsze.

PRZYKŁAD 16.2

Odejmowanie liczb dwójkowych $(10101101)_2$ oraz $(10110)_2$

Liczby zapisujemy jedną pod drugą, tak by w kolejnych kolumnach znalazły się cyfry stojące na pozycjach o tych samych wagach. Jest to postępowanie analogiczne do odejmowania liczb w systemie dziesiętnym.

Zatem:

$$\begin{array}{r} 10101101 \\ -\quad 10110 \\ \hline \end{array}$$

Odejmowanie rozpoczynamy od cyfr w prawej kolumnie. Wyniki zapisujemy pod kreską. W tym przykładzie odjęcie wartości cyfr 0 – 1, znajdujących się w drugiej kolumnie od prawej strony, daje wynik 1 oraz pożyczkę od następnej kolumny:

$$\begin{array}{lr} \textbf{Pożyczka} & 1 \\ & 10101101 \\ & -\quad 10110 \\ \hline \end{array}$$

Odjęcie wartości cyfr w trzeciej kolumnie od prawej strony daje wynik 1 – 1 = 0. Od tego wyniku musimy odjąć pożyczkę 0 – 1. Otrzymujemy wynik 1 i pożyczkę od następnej kolumny:

$$\begin{array}{lr} \textbf{Pożyczka} & 11 \\ & 10101101 \\ & -\quad 10110 \\ \hline & 10010111 \end{array}$$

Według tych zasad kontynuujemy odejmowanie wartości cyfr w pozostałych kolumnach. Pamiętajmy o pożyczkach! Jeśli w krótszej liczbie zabraknie cyfr, możemy kolumny uzupełnić zerami (wyróżnione kolorową czcionką):

$$\begin{array}{lr} \textbf{Pożyczka} & 1\;\;11 \\ & 10101101 \\ & -00010110 \\ \hline & 10010111 \end{array}$$

Sprawdźmy, czy otrzymany wynik jest poprawny.

$(10101101)_2 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7 = (173)_{10}$

$(10110)_2 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 = (22)_{10}$

$(10010111)_2 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7 = (151)_{10}$

$173 - 22 = 151$

Mnożenie dwójkowe

Przy mnożeniu liczb dwójkowych korzystamy z zasad przedstawionych w tabeli 16.3.

Tabela 16.3. Zasady mnożenia liczb w systemie dwójkowym

Działanie	Wynik	Działanie	Wynik
0 · 0	0	1 · 0	0
0 · 1	0	1 · 1	1

Tabela mnożenia dwójkowego pomaga przy tworzeniu iloczynów cząstkowych cyfr mnożnej i mnożnika. Iloczyny te następnie dodajemy według zasad opisanych w tabeli 16.1 i otrzymujemy wynik mnożenia.

PRZYKŁAD 16.3

Mnożenie liczb dwójkowych $(1011)_2$ oraz $(1100)_2$

Liczby zapisujemy jedną pod drugą, tak by w kolejnych kolumnach znalazły się cyfry stojące na pozycjach o tych samych wagach. Jest to postępowanie analogiczne do mnożenia liczb w systemie dziesiętnym.

Zatem:

```
  1011   mnożna
· 1100   mnożnik
------
```

Każdą cyfrę mnożnej mnożymy przez poszczególne cyfry mnożnika. Wartości iloczynów cząstkowych zapisujemy w odpowiednich kolumnach. Wynik mnożenia cyfry przez cyfrę jest zawsze jednocyfrowy.

Czyli:

```
      1011
    · 1100
    ------
      0000
     0000
    1011
   1011
```

Warto zauważyć, że gdy cyfra mnożnika wynosi 1, wynikiem mnożenia jest powtórzenie mnożnej z właściwym przesunięciem. Kiedy zaś cyfra mnożnika wynosi 0, wynikiem mnożenia są same zera.

Następnie puste kolumny uzupełniamy zerami (wyróżnione kolorową czcionką) i dodajemy do siebie wartości wszystkich cyfr w kolumnach. Należy pamiętać o przeniesieniach podczas dodawania (wyróżnione czerwoną czcionką).

```
                   1011
·                  1100
               --------
Przeniesienia   111
                0000000
                0000000
                0101100
+               1011000
               --------
               10000100
```

Sprawdźmy, czy otrzymany wynik jest poprawny.

$(1011)_2 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 = (11)_{10}$

$(1100)_2 = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 = (12)_{10}$

$(10000100)_2 = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7 = (132)_{10}$

$11 \cdot 12 = 132$

PRZYKŁADY

1.

```
                 101
               · 111
               -----
Przeniesienia  111
                00101
                01010
              + 10100
              -------
               100011
```

2.

```
                 1101
               ·  110
               ------
Przeniesienia  11
                000000
                011010
              + 110100
              --------
               1001110
```

3.

```
                 1100
               · 1111
               ------
Przeniesienia  1111
                0001100
                0011000
                0110000
              + 1100000
              ---------
               10110100
```

Dzielenie dwójkowe

Dzielenie dwójkowe jest najbardziej skomplikowaną z opisywanych tu operacji arytmetycznych. Wymyślono wiele algorytmów efektywnego dzielenia. Opisany zostanie algorytm, który polega na cyklicznym odejmowaniu odpowiednio przesuniętego dzielnika od dzielnej.

W systemie dwójkowym jest to szczególnie istotne, ponieważ dzielnika nie musimy mnożyć.

PRZYKŁAD 16.4

Dzielenie liczby dwójkowej $(1101)_2$ przez $(10)_2$ [czyli $(13)_{10}$ przez $(2)_{10}$]

Przesuwamy w lewo dzielnik, aż jego niezerowy bit zrówna się z niezerowym bitem na początku dzielnej. Nad dzielną rysujemy kreseczkę:

```
____
1101   dzielna
10     dzielnik przesunięty
```

Porównujemy dzielną z dzielnikiem. Jeśli dzielna jest większa od dzielnika lub mu równa, odejmujemy od niej dzielnik. Wtedy nad kreską na pozycji ostatniej cyfry dzielnika piszemy 1. Jeśli dzielna jest mniejsza od dzielnika, nie wykonujemy odejmowania. Przesuwamy dzielnik o jedną pozycję w prawo i powtarzamy opisane operacje. Jeśli dzielnika w ogóle nie da się odjąć od dzielnej (np. przy dzieleniu 5 przez 8), wynik dzielenia wynosi 0. Dzielna ma w takim przypadku wartość reszty z dzielenia. Zatem:

```
  1      pierwsza cyfra wyniku dzielenia
 -----
 1101    dzielna
-10      dzielnik przesunięty
 -----
 0101    wynik odejmowania dzielnika od dzielnej
```

Dzielnik przesuwamy o jeden bit w prawo i powtarzamy czynności z otrzymaną różnicą. Jeśli odejmowanie jest możliwe, nad kreską w następnej kolumnie dopisujemy 1. Odejmujemy dzielnik od różnicy, przesuwamy go o 1 bit w prawo. Jeśli odejmowanie nie jest możliwe, dopisujemy nad kreską 0 i przesuwamy dzielnik o 1 bit w prawo. Działania te kontynuujemy, aż ostatni bit dzielnika zrówna się z ostatnim bitem dzielnej.

110	wynik dzielenia
1101	dzielna
−10	dzielnik przesunięty, nad kreską 1
0101	dzielna po pierwszym odejmowaniu przesuniętego dzielnika
− 10	dzielnik przesunięty, nad kreską 1
0001	dzielna po drugim odejmowaniu przesuniętego dzielnika
− 10	odejmowanie dzielnika niemożliwe, nad kreską 0
0001	reszta z dzielenia

Końcowa dzielna jest resztą z dzielenia. W przykładzie otrzymaliśmy wynik dzielenia $(110)_2$ i resztę $(1)_2$, czyli $(6)_{10}$ i resztę $(1)_{10}$. Jest to wynik poprawny, gdyż $13 : 2 = 6$ i reszta wynosi 1.

SPRAWDŹ SWOJE UMIEJĘTNOŚCI

1. Wykonaj w zeszycie działania:
   a) 10011101 + 10011011
   b) 11001100 + 10101101
   c) 10100100 – 1001101
   d) 11001100 – 1101110
   e) 1001 · 111
   f) 1110 · 101
   g) 1001 : 11
   h) 1100 : 10
2. Sprawdź za pomocą systemu dziesiętnego, czy otrzymane wyniki są poprawne.

SPRAWDŹ SWOJĄ WIEDZĘ

1. W jaki sposób wykonać dodawanie dwójkowe?
2. W jaki sposób wykonać odejmowanie dwójkowe?
3. W jaki sposób wykonać mnożenie dwójkowe?
4. W jaki sposób wykonać dzielenie dwójkowe?